成人高考专升本高等数学考试模拟题二

一、选择题(1～10小题，每小题4分。共40分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1、设 $z=(3x^2+y^2)^{xy}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于（）

A、 $xy\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}$

B、 $(3x^2+y^2)^{xy}\cdot\ln(3x^2+y^2)$

C、 $y\cdot(3x^2+y^2)^{xy}[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$

D、 $y\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2]$

答案：D

解析：【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】因 $z=(3x^2+y^2)^{xy}$ 可看作是 $z=u^v,u=3x^2+y^2,v=xy$ 复合而成，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=v\cdot u^{v-1}\cdot 6x+u^v\cdot\ln u\cdot y$$

$$=xy\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}\cdot 6x+(3x^2+y^2)^{xy}\cdot\ln(3x^2+y^2)\cdot y$$

$$=y\cdot(3x^2+y^2)^{xy-1}\cdot[(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)+6x^2].$$

2、当 $x\to 1$ 时，$\frac{1-x}{1+x}$ 是 $1-\sqrt{x}$ 的（））

A、 高阶无穷小

B、 低阶无穷小

C、 等价无穷小

D、 不可比较

答案：C

解析：【考情点拨】本题考查了无穷小量阶的比较的知识点.

【应试指导】由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}=1$，所以当 $x\to1$ 时，$\frac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是等价无穷小.

3、若f(u)可导，且y=f(e^x)，则dy= （ ）

A、 $f'(e^x)dx$

B、 $f'(e^x)e^x dx$

C、 $f(e^x)e^x dx$

D、 $f'(e^x)$

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】因为 $y=f(e^x)$，所以，$y'=f'(e^x)e^x dx$.

4、不定积分 $\int\left(\frac{1}{\sin^2x}+1\right)d\sin x$ 等于（）

A、 $-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$

B、 $\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$

C、 $-\cot x+\sin x+C$

D、 $\cot x+\sin x+C$

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)\mathrm{d}\sin x=-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$，故选 A.

5、函数y=x+cosx在(0，2π)内（）

A 、 单调增加

B 、 单调减少

C 、 不单调

D 、 不连续

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 由 $y=x+\cos x$，所以 $y'=1-\sin x\geq 0(0<x<2\pi)$，故 y 在 $(0,2\pi)$ 内单调增加.

6、如果在区间(a，b)内，函数，(z)满足f'(x)>0，f''(x)<0，则函数在此区间是 (　)

A 、 单调递增且曲线为凹的

B 、 单调递减且曲线为凸的

C 、 单调递增且曲线为凸的

D 、 单调递减且曲线为凹的

答案： C

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的单调性和凹凸性的知识点.

【应试指导】因，f(x) >0，故函数单调递增，又f'(x)<0，所以函数曲线为凸的.

7、 设 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=$ （）

A 、 1

B 、 -1

C 、 $\frac{\pi^2}{4}$

D 、 $-\frac{\pi^2}{4}$

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 由 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$，知

$$\int f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(-\sin x)\mathrm{d}\sin x$$

$$=-\int f(-\sin x)\mathrm{d}(-\sin x)=-(-\sin x)^2+C$$

$$=-\sin^2 x+C,$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x=-\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1.$

8、曲线y=xarctanx的凹区间为（　）

A 、 (0，+∞)

B 、 (-∞，0)

C 、 (-∞，+∞)

D 、 不存在

答案： C

解析： 【考情点拨】本题考查了曲线的凹区件的知识点.

【应试指导】 由 $y=x\arctan x$，得 $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$，

$$y''=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{(1+x^2)^2}$$，显然 $y''>0$. 所以曲线在整个数轴上都是凹弧.

9、设f(x)在[a，b]上连续，且C$t\neq-b$，则下列各式不成立的是（）

A、 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

B、 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

C、 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$

D、 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，必有$f(x)=0$

答案：C

解析：【考情点拨】本题考查了定积分的相关知识的知识点.

【应试指导】由题意知，C项不成立，其余各项均成立.

10、曲线$x^2+y^2=2x$在点(1，1)处的法线方程为（）

A、 x=1

B、 y=1

C、 y=x

D、 y=0

答案：A

解析：【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的法线方程的知识点.

【应试指导】 $x^2+y^2=2x$，两边对x求导得$2x+2yy'=2$，将(1,1)代入得$y'\big|_{(1,1)}=0$，即点(1,1)

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11、$y=\cos e^{\frac{1}{x}}$，则$\mathrm{d}y=$________.

【答案】 $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sin e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

【考情点拨】本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 由$y=\cos e^{\frac{1}{x}}$，

所以$\mathrm{d}y=-\sin e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cdot\sin e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$

12、$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=$________.

【答案】e^6

【考情点拨】 本题考查了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot6}=e^6.$

13、$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=$________.

【答案】e^{-2}

【考情点拨】 本题考查了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}\cdot(-2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-2}$

$=e^{-2}.$

14、$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.

【答案】0

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 因函数$f(x)=\frac{x^2\sin x}{1+x^2}$在$[-1,1]$上是奇函数，因此$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

注：奇偶函数在对称区间上积分的性质是常考题目之一，应注意.

15、设$y=x\ln x$，则$y^{(10)}=$________.

【答案】$8!x^{-9}$

【考情点拨】本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y'=\ln x+1, y''=\frac{1}{x}, y'''=-x^{-2}$,

$y^{(4)}=(-1)(-2)x^{-3},\cdots,y^{(10)}=(-1)^{8}8!x^{-9}=8!x^{-9}$.

注：$y=\ln x, y'=\frac{1}{x},\cdots,y''=(-1)x^{-2},\cdots$,

$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!x^{-n}$.

利用莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

令 $v=x, u=\ln x, (x\cdot\ln x)^{(10)}$

$$=C_{10}^0 x(\ln x)^{(10)}+C_{10}^1 x'(\ln x)^{(9)}$$
$$=x\cdot(-1)^9 9!x^{-10}+10\cdot(-1)^8 8!x^{-9}$$
$$=(-1)^8 8!(-9+10)x^{-9}=8!x^{-9}.$$

16、$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{10-6x}}dx=$ ________.

【答案】 $\frac{2}{27}$

【考情点拨】本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{10-6x}}dx$

$=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{-6x}{\sqrt{10-6x}}dx$

$=-\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\frac{-6x+10-10}{\sqrt{10-6x}}dx$

$=-\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\sqrt{10-6x}\,dx+\frac{10}{6}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{10-6x}}$

$=-\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{\frac{1}{2}}\right]d(10-6x)+\frac{10}{6}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{6}(10-6x)^{-\frac{1}{2}}\right]d(10-6x)$

$=\frac{1}{36}\times\frac{2}{3}(10-6x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}-\frac{10}{36}\times 2(10-6x)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{54}\times(8-64)-\frac{5}{9}\times(2-4)=\frac{2}{27}$.

注：本题可另解如下：令 $\sqrt{10-6x}=t$，则 $x=\frac{1}{6}(10-t^2)$.

所以 $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{10-6x}}dx$

$=\int_{4}^{2}\frac{\frac{1}{6}(10-t^2)}{t}\cdot\frac{1}{6}\cdot(-2t)dt$

$=\frac{1}{18}\int_{2}^{4}(10-t^2)dt$

$=\frac{1}{18}\left(10t-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{2}^{4}$

$=\frac{1}{18}\times\left(40-\frac{64}{3}-20+\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{27}$.

17、$y=\frac{1}{1+\tan x}$，则 $y'=$ ________.

【答案】 $-\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$

【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 $y=\frac{1}{1+\tan x}$，则 $y'=\frac{-\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}=\frac{-\sec^2 x}{\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x}}=-\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$.

18、设 $z=2x^3y^2$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

【答案】 $12x^2y$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=2x^3y^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2y^2, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=12x^2y$.

19、若 $\int f(x)dx=\sin x+C$，则 $\int f'(x)dx=$ ________.

cosx+C

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】

由 $\int f(x)dx=\sin x+C$，知 $f(x)=(\sin x)'=\cos x$.

所以 $f'(x)=-\sin x$，故 $\int f'(x)dx=\int(-\sin x)dx=\cos x+C$.

注：求出 $f(x)=\cos x$ 以后，由 $\int f'(x)dx=f(x)+C=\cos x+C$ 也可得出结果.

20、 设 $z=e^{\sin x}\cos y$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ ________.

【答案】 $-e^{\sin x}\cos x\sin y$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z=e^{\sin x}\cos y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=-e^{\sin x}\sin y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-e^{\sin x}\cos x\sin y$.

三、解答题(21～28题，共70分．解答应写出推理、演算步骤)

21、(本题满分8分)

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$

注：将分母 $\sin^2 x$ 用与之等价的无穷小量 x^2 代换，这是一个技巧.

22、(本题满分10分)

求由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4x+4=0$ 确定的隐函数的全微分.

等式两边对 x 求导，将 y 看做常数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{4x+2y-2}{4-2z}=\frac{2x+y-1}{2-z}$，

同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y+2x-2}{4-2z}=\frac{x+y-1}{2-z}$，

所以dz= $\frac{5}{6\div z}[6x\cdot\ y\div 5dx\cdot\ y\cdot\ x\div 5dy]$

23、(本题满分10分)

一批零件中有10个合格品，3个次品，安装机器时，从这批零件中任取一个，取到合格品才能安装．若取出的是次品，则不再放回，求在取得合格品前已取出的次品数X的概率分布．

由题意，X的可能取值为0，1，2，3．X=0，即第一次就取到合格品，没有取到次品，P{X=0}= $\frac{10}{13}$；X=1，即第一次取到次品，第二次取到合格品，P{X=1}= $\frac{3}{13}\times\frac{10}{12}=\frac{5}{26}$；同理，P{X=2}= $\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{143}$；P{X=3}= $\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{10}{10}=\frac{1}{286}$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{5}{143}$	$\frac{1}{286}$

24、(本题满分8分)

已知 $\int_1^{x+1} f(t)dt=xe^{x+1}$，求 $f'(x)$.

等式两边对 x 求导，有

$f(x+1)=e^{x+1}+xe^{x+1}=(1+x)e^{x+1}$，

所以 $f(x)=xe^x$，因此 $f'(x)=e^x+xe^x$.

25、(本题满分10分)

试用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{3+x}\,dx=0$.

由 $\sqrt{3}\leqslant\sqrt{3+x}\leqslant 2\quad x\in[0,1]$，

则 $\sqrt{3}\cdot x^n\leqslant\sqrt{3+x}\cdot x^n\leqslant 2x^n$，

所以 $\sqrt{3}\int_0^1 x^n dx\leqslant\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n dx\leqslant 2\int_0^1 x^n dx$，

即 $\sqrt{3}\ \frac{1}{n+1}\leqslant\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n dx\leqslant 2\cdot\frac{1}{n+1}$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n dx\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}$

即 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{3+x}\cdot x^n dx\leqslant 0$.

故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\ \sqrt{3+x}\,dx=0$.

26、(本题满分8分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

27、(本题满分10分)

已知曲线 $y=ax^3+bx^2+cx$ 在点(1，2)处有水平切线，且原点为该曲线的拐点，求a，b，c的值，并写出此曲线的方程.

$y = ax^3 + bx^2 + cx, y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b$,

由已知条件得

$2 = a + b + c$,　　(曲线过(1,2)点)

$3a + 2b + c = 0$,　(在(1,2)点 $y' = 0$)

$2b = 0$,　　　(原点为拐点)

故 $b = 0, a = -1, c = 3$，此曲线的方程为 $y = -x^3 + 3x$.

28、(本题满分10分)

设 $z = \sin(xy^2) + e^{x^2 y}$，求 dz.

由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy^2) \cdot y^2 + e^{x^2 y} \cdot 2xy$，

$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy^2) \cdot 2xy + e^{x^2 y} \cdot x^2$，

所以 $dz = [y^2 \cos(xy^2) + 2xy e^{x^2 y}]dx + [2xy \cos(xy^2) + x^2 e^{x^2 y}]dy$.