成人高考专升本高等数学考试模拟题三

一、选择题(1～10小题，每小题4分。共40分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1、曲线Y=3x^2-x^{3}的凸区间为（）

A、(-∞，1)

B、(1，+∞)

C、(-∞，0)

D、(0，+∞)

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了曲线的凸区间的知识点．

【应试指导】$y=3x^2-x^3$，$y'=6x-3x^2$，$y''=6-6x=6(1-x)$，显然当 $x>1$ 时，$y''<0$；而当 $x<1$ 时，$y''>0$．故在 $(1,+\infty)$ 内曲线为凸弧．

2、下列反常积分收敛的是（ ）

A、$\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$

B、$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

C、$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

D、$\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x$

答案：C

解析：【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的敛散性的知识点．

【应试指导】对于选项 A：$\int_1^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\cos x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b-\sin 1)$ 不存在，此积分发散；对于选项 B：$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\mathrm{e}^b-\mathrm{e})$ 不存在，此积分发散；对于选项 C：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$，此积分收敛；对于选项 D：$\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\ln x\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[(x\ln x)-x\Big|_1^b\right]=$

$\lim\limits_{b\to+\infty}(b\ln b-b+1)$ 不存在，此积分发散．

3、$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=$（ ）

A、0

B、$\frac{1}{2}$

C、∞

D、1

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了极限的知识点．

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$.

4、设函数 $z=\ln xy+e^{x^2y}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=$

A、 $\frac{1}{2}-2e^2$

B、 $\frac{1}{2}+e^2$

C、 $1+2e^2$

D、 $1+e^2$

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了二元函数的一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy}\cdot x+e^{x^2y}\cdot x^2$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{2}+e^2$.

注：也可先将 $x=1$ 代入，则 $\left.z\right|_{(1,y)}=\ln y+e^y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}+e^y$，所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{2}+e^2$.

5、当x→0时，无穷小量x+sinx是比x的（）

A 、 高阶无穷小

B 、 低阶无穷小

C 、 同阶但非等价无穷小

D 、 等价无穷小

答案： C

解析： 【考情点拨】本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=2$，所以 $x\to0$ 时，$x+\sin x$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.

6、曲线 $y=x^3-3x$ 上切线平行于x轴的点是（ ）

A 、 (0，0)

B 、 (1，2)

C 、 (-1，2)

D 、 (-1，-2)

答案： C

解析： 【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】 由 $y=x^3-3x$ 得 $y'=3x^2-3$，令 $y'=0$，得 $x=\pm1$. 经计算 $x=-1$ 时，$y=2$；$x=1$ 时，$y=-2$，故选 C.

7、若 $\int_0^x f(t)dt=\frac{x^4}{2}$，则 $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx$ 等于 （ ）

A 、 2

B 、 4

C 、 8

D 、 16

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 解法 1：

$\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=\int_0^4 f(\sqrt{x})\cdot2d(\sqrt{x})=2\times\left.\frac{1}{2}x^2\right|_0^4=16$.

解法 2：

因 $\int_0^x f(t)dt=\frac{x^4}{2}$，于是 $f(x)=2x^3$，从而 $\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot2\cdot x^{\frac{3}{2}}dx=2\int_0^4 xdx=\left.x^2\right|_0^4=16$.

8、y=xx，则dy=（）

A、 $x^x dx$

B、 $x^x(\ln x+1)dx$

C、 $x^x \ln x dx$

D、 $x^x(\ln x-1)dx$

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】由 $y=x^x$，则 $\ln y = x\ln x$，两边对 x 求导得 $\frac{1}{y}y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$，

所以 $y' = x^x(\ln x+1)$，故 $dy = x^x(\ln x+1)dx$.

9、 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t^2 dt =$ （）

A、 $2x\cos x^4$

B、 $x^2 \cos x^4$

C、 $2x\sin x^4$

D、 $x^2 \sin x^4$

答案：C

解析：【考情点拨】本题考查了变上限积分求导的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t^2 dt = \sin(x^2)^2 \cdot (x^2)' = 2x\sin x^4$.

10、下列极限计算正确的是（）

A、 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 0$

B、 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

C、 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x} = 1$

D、 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】对于选项 A: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \neq 0$，错误；对于选项 B: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$，正确；对于选项 C: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sin x} = \infty \neq 1$，错误；对于选项 D: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0 \neq 1$，错误.

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11、 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x =$ ________.

【答案】e

【考情点拨】本题考查了 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e.$$

注：本题可另解如下：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e.$$

12、 $y=\cos 2x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处的切线方程为________.

【答案】 $y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
【考情点拨】本题考查了由线上一点处的切线方程的知识点.
【应试指导】 由 $y=\cos 2x$，得 $y'=-2\sin 2x$，则
$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}$，
又因 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y=\frac{1}{2}$，所以所求切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

13、$y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，则 $y'=$ ________.

【答案】 $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
【答案】
【考情点拨】本题考查了复合函数求导的知识点.
【应试指导】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$，
由复合函数求导法，
则，
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

14、$\int_{e}^{e^2}\ln x\,dx=$ ________.

【答案】e^2
【考情点拨】本题考查了分部积分法的知识点.
【应试指导】
$$\int_{e}^{e^2}\ln x\,dx=x\ln x\Big|_{e}^{e^2}-\int_{e}^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=2e^2-e-x\Big|_{e}^{e^2}$$
$$=2e^2-e-e^2+e=e^2.$$

15、$\int_{1}^{e}\ln x\,dx=$ ________.

【答案】1
【考情点拨】本题考查了定积分的分部积分法的知识点.
【应试指导】 $\int_{1}^{e}\ln x\,dx=x\ln x\Big|_{1}^{e}-\int_{1}^{e}x\cdot\frac{1}{x}dx=$
$e-(e-1)=1.$

16、设 $y=y(x)$ 由 $x^2+2xy-y^2=2x$ 确定，且 $y\Big|_{x=2}=0$，则 $y'\Big|_{x=2}=$ ________.

【答案】$-\frac{1}{2}$
【考情点拨】本题考查了隐函数在一点处的一阶导数的知识点.
【应试指导】 $x^2+2xy-y^2=2x$ 两边对 x 求导
（注意 y 是 x 的函数），
因 $2x+2y+2xy'-2yy'=2$，
故 $y'=\frac{2-2x-2y}{2x-2y}=\frac{1-x-y}{x-y}$.
令 $x=2$，且 $y\Big|_{x=2}=0$，则 $y'\Big|_{x=2}=-\frac{1}{2}$.

17、设 $y=e^x\cos x$，则 $y''=$ ________.

【答案】$-2e^x\sin x$
【考情点拨】本题考查了一元函数的二阶导数的知识点.
【应试指导】 由 $y=e^x\cos x$，则 $y'=e^x\cos x-e^x\sin x$.
$y''=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x$
$=-2e^x\sin x.$

18、若 $f'(x_0)=1$，$f(x_0)=0$，则 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)=$ ________.

【答案】-1
【考情点拨】本题考查了利用导数定义求极限的知识点.
【应试指导】 $\lim\limits_{h\to\infty}hf\left(x_0-\frac{1}{h}\right)$
$$=-\lim_{h\to\infty}\frac{f\left(x_0-\frac{1}{h}\right)-f(x_0)}{-\frac{1}{h}}$$
$$=-\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$
$$=-f'(x_0)=-1.$$
注：注意导数定义的结构特点.
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

19、设 $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

【答案】 $\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】由 $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$，

即 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y=\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

20、设 $z=e^{\frac{x}{y}}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

【答案】$-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】由 $z=e^{\frac{x}{y}}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}$，

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)$.

三、解答题(21～28题，共70分．解答应写出推理、演算步骤)

21、设 $y=2x^3\arccos x+(x^2-2)\sqrt{1-x^2}$，求 dy.

$$dy=\left[6x^2\arccos x+2x^3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2x\sqrt{1-x^2}+(x^2-2)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$=\left[6x^2\arccos x-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}+2x\sqrt{1-x^2}-\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx$$

$$=\left(6x^2\arccos x-\frac{5x^3-4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

$$=\left(6x^2\arccos x-\frac{5x^3-4x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

22、(本题满分8分)

设 f'' 存在，$z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)\cdot y+yf'(x+y)$，

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'(xy)\cdot x+\frac{1}{x}[f'(xy)+yf''(xy)\cdot x]+f'(x+y)+yf''(x+y)$

$=yf''(xy)+f'(x+y)+yf''(x+y)$.

23、(本题满分8分)

求 $\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx$.

$$\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+C.$$

24、(本题满分8分)

求曲线 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的水平渐近线和铅直渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$，

所以x=0是曲线的铅直渐近线，

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$，

所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线.

25、(本题满分l0分)

当z>0时，证明：$e^x>1+x$.

证法1：在 $[0,x]$ 上令 $F(x)=e^x$，则使用拉格朗日定理得，

$F(x)-F(0)=F'(\xi)(x-0)$，$\xi\in(0,x)$，即

$e^x-1=e^{\xi}\cdot x$，

由于 $e^{\xi}>1$，所以 $e^x-1>x$，即 $e^x>1+x$.

证法2：令 $G(x)=e^x-1-x$，则 $G'(x)=e^x-1$，

故在 $[0,x]$ 内 $G'(x)>0$，

所以在 $[0,x]$ 上 $G(x)$ 单调递增，由 $G(0)=0$，得

$x>0$ 时，$G(x)>0$，

即 $e^x-1-x>0$，亦即 $e^x>1+x$.

26、(本题满分8分)

求函数$z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$的极值．

由题知$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+9$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-6$，令$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$，

联立解出驻点为(-4，1)，

由$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1$，

且点(-4，1)处

$B^2-AC=1-4<0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$，

故在点(-4，1)处函数z取得极小值-1．

27、(本题满分8分)

一个袋子中有5个球，编号为l，2，3，4，5，同时从中任取3个，以X表示取出的3个球中的最大号码，求随机变量X的概率分布．

依题意，随机变量x只能取值3，4，5；且$P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$；$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$.

所以 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

28、(本题满分l0分)

求 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 的单调区间、凸凹性区间及渐近线.

由 $y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$，$y''=\frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$，令 $y'=0$，有

$x=0$，令 $y''=0$，有

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.（如下表所示）

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
y'	+		+	0	−		−
y''	+	0	−		−	0	+
y	↗凹		↗凸		↘凸		↘凹

所以函数 y 的单调增区间为$(-\infty,0)$，单调减区间为$(0,+\infty)$；而函数 y 的凸区间为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，凹区间为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

又因$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$，所以函数有水平渐近线 $y=0$，但函数无铅直渐近线.