成人高考专升本高等数学考试模拟题四

一、选择题(1～10小题，每小题4分。共40分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1、$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=P$，则 $P=$ （ ）

A、$f'(x_0)$

B、$2f'(x_0)$

C、0

D、不存在

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了导数定义的应用的知识点．

【应试指导】 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-[f(x_0-\Delta x)-f(x_0)]}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$．

2、设随机变量 X：0,1,2 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$ （ ）

A、$\frac{1}{2}$

B、$\frac{1}{6}$

C、$\frac{1}{3}$

D、$\frac{5}{6}$

答案：B

解析：【考情点拨】本题考查了由分布函数求概率的知识点．

【应试指导】 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$ 因为

X 取值为 0,1,2，所以

$F(1)=P\{X\leqslant 1\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\frac{1}{3}+P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，

故 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$．

3、下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是（）

A、$\dfrac{\sin x}{x}(x\to 0)$

B、$2^{-x}-2(x\to 0)$

C、$\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}(x\to +\infty)$

D、$x\cdot\sin\dfrac{1}{x}(x\to 0)$

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(2^{-x}-2)=-1$，故由无穷小量知应选 D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=1$，$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

4、曲线y=e^{x}和直线y=1，x=1围成的图形面积等于（）

A 、 2-e

B 、 e-2

C 、 e-1

D 、 e+1

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了曲线围成的面积的知识点.

由题意知，所求面积 $_6^{\gamma} e^6 \div 5\mathrm{d}x > e \div 6$

5、设 $f(x)$ 是可导函数，且 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$，则 $f'(x_0)=$ （）

A 、 1

B 、 0

C 、 2

D 、 1/2

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了导数的定义的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=1$ 与

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

相比较，可得

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\frac{1}{2}$

注： 令 $2h=t$，由 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{\frac{1}{2}t}=1$，

也可得出f'(x0)=

$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=\frac{1}{2}$.

6、 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=$ （ ）

A 、 1

B 、 1/2

C 、 2

D 、 不存在

答案： B

解析：**【考情点拨】** 本题考查了 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$.

7、设 $z=\ln(x+y^2)$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$ （ ）

A 、 $\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

B 、 $\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y$

C 、 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

D 、 $\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y$

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由 $z=\ln(x+y^2)$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$，

故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1$，所以 $\left.dz\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}dx+dy$.

8、设 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$ 等于（）

A、 0

B、 1

C、 $\frac{1}{2}$

D、 2

答案： C

解析： 【考情点拨】本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因 $f'(1)=1$，于是 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$.

9、曲线$y=x^4-3$在点(1，-2)处的切线方程为（）

A、 2x-y-6=0

B、 4x-y-6=0

C、 4x-y-2=0

D、 2x-y-4=0

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 因 $y=x^4-3$，所以 $y'=4x^3$，于是曲线在点(1，-2)处的切线的斜率 $k=\left.y'\right|_{x=1}=4$，从而得切线方程：$y+2=4(x-1)$，即 $4x-y-6=0$.

10、 设在 (a,b) 内有 $\int f'(x)dx=\int g'(x)dx$，则在 (a,b) 内必定有 （）

A、 $f(x)-g(x)=0$

B、 $f(x)-g(x)=C$

C、 $df(x)\neq dg(x)$

D、 $f(x)dx=g(x)dx$

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 由 $\int f'(x)dx=\int g'(x)dx$，得 $\int[f'(x)-g'(x)]dx=0$，即 $f'(x)-g'(x)=0$，又 $\int[f'(x)-g'(x)]dx=\int 0dx=0$，故 $f(x)-g(x)-C=0$，所以 $f(x)-g(x)=C$.

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11、 $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=$ __________.

【答案】1
【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}dx$

$= -\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a x de^{-x}$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^a + \int_0^a e^{-x}dx\right)$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}\left[-ae^{-a} + (-e^{-x})\Big|_0^a\right]$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}(-ae^{-a} + 1 - e^{-a}) = 1.$

注：$\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a}{e^a} = 0$ 可用洛必达法则求出.

12、$\int_1^2 \frac{1}{x^2}5^{\frac{1}{x}}dx =$ ________.

【答案】$\frac{1}{\ln5}(5-\sqrt{5})$

【考情点拨】本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】$\int_1^2 \frac{1}{x^2}5^{\frac{1}{x}}dx = \int_1^2(-5^{\frac{1}{x}})d\frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{\ln5}\cdot 5^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2$

$= -\frac{1}{\ln5}\times(\sqrt{5}-5)$

$= \frac{5-\sqrt{5}}{\ln5}.$

13、设 $y = e^{2\arccos x}$，则 $y'\Big|_{x=0} =$ ________.

【答案】$-2e^{\pi}$

【考情点拨】本题考查了一元函数在一点处的一阶导数的知识点.

【应试指导】由 $y' = e^{2\arccos x}\cdot 2\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$，

故 $y'\Big|_{x=0} = -2e^{\pi}$.

14、$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx =$ ________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^a\frac{1}{(1+x^2)^2}d(x^2+1)$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^a$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right) = \frac{1}{2}.$

注：根据本题结构特点，容易想到凑微分，2xdx=$dx^2 = d(x^2+1)$.

15、设 $y = f(x^2)$，且 $f(x)$ 可导，则 $y' =$ ________.

【答案】$2xf'(x^2)$

【考情点拨】本题考查了复合函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】$y = f(x^2)$，令 $u = x^2$，则 $y = f(u)$，

由复合函数求导法则得

$y' = f'(u)\cdot u' = f'(x^2)\cdot 2x.$

16、$y = y(x)$ 由方程 $xy = e^{y-x}$ 确定，则 $dy =$ ________.

【答案】$\frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}dx$

【考情点拨】本题考查了隐函数的微分的知识点．【应试指导】方程xyr2两边对x求导，y为x的函数，有

$y + xy' = e^{y-x}\cdot(y'-1)$

解得 $dy = \frac{y+e^{y-x}}{e^{y-x}-x}dx.$

17、若 $z = \ln(x+e^y)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$ ________.

【答案】$-\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】因 $z = \ln(x+e^y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+e^y}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{-e^y}{(x+e^y)^2}.$

18、$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^2 t dt}{x} =$ ________.

【答案】1

【考情点拨】本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^2 t dt}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x}{1} = 1.$

19、设 $z=\dfrac{(x-2y)^2}{2x+y}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

【答案】$\dfrac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$z=\dfrac{(x-2y)^2}{2x+y}$，

$$\text{则}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2(x-2y)\cdot(2x+y)-2(x-2y)^2}{(2x+y)^2}$$
$$=\frac{2(x-2y)(2x+y-x+2y)}{(2x+y)^2}$$
$$=\frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}.$$

20、$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=$ ________.

【答案】$\dfrac{1}{8}$

【考情点拨】本考题考查了无穷区间的反常积分的知识点

【应试指导】$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{a\to+\infty}\int_2^a\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{a\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\Big|_2^a\right]$$
$$=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{8}.$$

三、解答题(21～28题，共70分．解答应写出推理、演算步骤)

21、(本题满分8分)

计算 $\displaystyle\int x^2e^x\mathrm{d}x$.

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}e^x$$
$$=x^2e^x-2\int xe^x\mathrm{d}x$$
$$=x^2e^x-2\int x\mathrm{d}e^x$$
$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

22、(本题满分10分)

设 z 是 x,y 的函数，且 $xy=xf(z)+y\varphi(z)$，$xf'(z)+y\varphi'(z)\neq0$.

证明：$[x-\varphi(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

由 $xy=xf(z)+y\varphi(z)$，两边对 x 求偏导有

$y=f(z)+xf'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\varphi'(z)$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-f(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$

同理 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x-\varphi(z)}{xf'(z)+y\varphi'(z)}$，

故 $[x-\varphi(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

23、(本题满分8分)

计算 $\displaystyle\int\frac{x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

由 $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\mathrm{d}\arctan x$，则

$$\int\frac{x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\int\arctan x\mathrm{d}\arctan x$$
$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$$

24、(本题满分8分)

设 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$，求 $\mathrm{d}y$.

由 $y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln\tan x$，两边对 x 求导有

$\dfrac{1}{y}y'=-\dfrac{1}{x^2}\ln\tan x+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\tan x}\sec^2x$，

所以 $y'=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sec^2x}{\tan x}-\dfrac{1}{x^2}\ln\tan x\right)$，

故 $\mathrm{d}y=(\tan x)^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{\sec^2x}{x\tan x}-\dfrac{1}{x^2}\ln\tan x\right)\mathrm{d}x$.

25、(本题满分10分)

求 $y=f(x)=2x^3-3x^2-12x+14$ 的极值点和极值，以及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

$y' = 6x^2 - 6x - 12, y'' = 12x - 6$,
令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 2$,
当 $x_2 = 2$ 时, $y'' = 18 > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取极小值 -6.
当 $x_1 = -1$ 时, $y'' < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值 21.
又令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$, 从而曲线为凸的, 即函数曲线的凸区间为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; $x > \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$, 从而曲线为凹的, 即函数曲线的凹区间为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; 又因 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}$, 故曲线的拐点为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

26、(本题满分8分)

设 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 均为 $y = a\ln x + bx^2 + 3x$ 的极值点, 求 a, b.

由 $y = a\ln x + bx^2 + 3x$, 则 $y' = \frac{a}{x} + 2bx + 3$.
因为 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 是极值点, 所以 $y'|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=2} = 0$, 即

$$\begin{cases} a + 2b + 3 = 0, \\ \frac{a}{2} + 4b + 3 = 0, \end{cases}$$

解得

$a = -2, b = -\frac{1}{2}$.

27、(本题满分8分)

设 $f(u)$ 有二阶导数, 计算 $\frac{\partial^2 f(e^{xy})}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial f(e^{xy})}{\partial x} = f'(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y,$$

$$\frac{\partial^2 f(e^{xy})}{\partial x^2} = [f''(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y] \cdot e^{xy} y + y f'(e^{xy}) \cdot e^{xy} \cdot y$$
$$= y^2 e^{xy}[f''(e^{xy}) e^{xy} + f'(e^{xy})].$$

28、(本题满分8分)

某运动员投篮命中率为0.3，求一次投篮时投中次数的概率分布及分布函数.

这次投篮的投中次数是随机变量，设其为x，它可能取的值为0，l，X=0表示投中0次，即投篮未中，P{x=0}=l-0．3=0．7；X=1表示投中一次，P{x=1}=0．3，故概率分布为

X	0	1
P	0.7	0.3

,

$$分布函数\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.7, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0.7 + 0.3 = 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$