成人高考专升本高等数学考试模拟题五

一、选择题(1～10小题，每小题4分。共40分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}=$ ( )

A、∞

B、0

C、1

D、$\dfrac{1}{2}$

答案：D

解析：【考情点拨】本题考查了极限(洛必达法则)的知识点．

【应试指导】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)\cdot 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot 2}{4x^2}=\dfrac{1}{2}.$

2、若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则 $f(x)$ 在 x_0 点 ( )

A、一定有定义

B、一定有f(x0)=A

C、一定连续

D、极限一定存在

答案：D

解析：【考情点拨】本题考查了极限的知识点．

【应试指导】从左右极限存在，可推出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，但不能推出其他几个结论，故选 D.

3、函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & -1<x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x<3\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ( )

A、1

B、2

C、3

D、4

答案：A

解析：【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的知识点．

【应试指导】f(x)在x=0处连续，所以f(x)在x=0处左连续、右连续，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax}{x}=a=f(0)=1.$

4、若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$，则 $f(x)$ 等于 ( )

A、$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B、$\dfrac{1}{1+x^2}$

WWW.FJZSB.CN

C、 $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D、 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

答案： D

解析：本题考查了不定积分的知识点.【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$，所以 $f(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C]' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5、对于函数z=xy，原点(0，0)（）

A 、 不是函数的驻点

B 、 是驻点不是极值点

C 、 是驻点也是极值点

D 、 无法判定是否为极值点

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的驻点、极值点的知识点.

【应试指导】 因 $z=xy$，于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$；令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，且 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得驻点(0,0)；又 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，从而 $B^2-AC=1>0$，故点(0,0)不是极值点.

6、下列反常积分发散的是（）

A、 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

B、 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\cdot\ln^2 x}\mathrm{d}x$

C、 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

D、 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了无穷区间反常积分的发散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A：$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\Big|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{2}$，此积分收敛；

对于选项 B：$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 2}$，此积分收敛；

对于选项 C：$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{0}=1$，此积分收敛；

对于选项 D：$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_{-\infty}^{0}=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}$，该极限不存在，故此积分发散.

7、下列四个函数不能做随机变量x的分布函数的是（ ）

A、

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2} & 1\leqslant x<2,\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$$

B、

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

福建专升本网 WWW.FJZSB.CN

C 、 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

D 、 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了分布函数的知识点.

【应试指导】 选项 A,B,C 中 $F(x)$ 都符合分布函数的性质.而选项 D 中 $F(x)$,不满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

8、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x=$ ()

A 、 F(cosx)+C

B 、 F(sinx)+C

C 、 -F(cosx)+C

D 、 -F(sinx)+C

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x$

$=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x\xlongequal{u=\sin x}\int f(u)\mathrm{d}u$

$=F(u)+C=F(\sin x)+C.$

9、函数f(x)=x4-24x2+6x在定义域内的凸区间是（）

A 、 (-∞， 0)

B 、 (—2， 2)

C 、 (0， +∞)

D 、 (-∞， ∞)

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的凸区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)=x^4-24x^2+6x$,则 $f'(x)=4x^3-48x+6$, $f''(x)=12x^2-48=12(x^2-4)$,令 $f''(x)<0$,有 $x^2-4<0$,于是 $-2<x<2$,即凸区间为 $(-2,2)$.

10、设y=xn，n为正整数，则y(n)=（ ）

A 、 0

B 、 1

C 、 n

D 、 n!

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 由 $y=x^n$,则 $y^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot x^{n-k}$,

所以 $y^{(n)}=n!$.

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11、 $\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$ ________.

【答案】 $-\frac{1}{2}\ln 3$

【考情点拨】本题考查了简单有理函数的积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x$

$=\int_0^2\frac{1}{(x-1)(x-3)}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Big|_0^2$

$=-\frac{1}{2}\ln 3.$

12、设曲线$y=z^2+x-2$在点M处切线的斜率为2，则点M的坐标为.

【答案】$\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$

【考情点拨】本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】$y=x^2+x-2$，$y'=2x+1$，由导数的几何意义可知，若点 M 的坐标为(x_0,y_0)，则$2x_0+1=2$，解得$x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{4}$.

13、若 $f(x)$ 是奇函数，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，则$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

【答案】-1

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】若 $f(x)$ 是奇函数，则$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，

即$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，所以$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-1$.

注：若 $f(x)$ 是偶函数，则$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

14、当 $f(0)=$ ________ 时，$f(x)=\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续.

【答案】mk

【考情点拨】本题考查了函数在一点处连续的的知识点.

【应试指导】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}\\&=\lim_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}\cdot km}\\&=\ln e^{km}=km,\end{aligned}$$

15、设 $z=f(xy,x+y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

【答案】f1y+f2

【考情点拨】本题考查了复合函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$z=f(xy,x+y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1y+f_2$.

16、$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln x)^3}\mathrm{d}x=$ ________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【考情点拨】本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln x)^3}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{1}{(1+\ln x)^3}\mathrm{d}(1+\ln x)\\&=\lim_{a\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(1+\ln x)^2}\Big|_1^a\right]\\&=\frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(1+\ln a)^2}\right]=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

注：$\int\frac{1}{u^3}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}u^{-2}+C$，$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{(1+\ln a)^2}=0$.

17、$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}}=$ ________.

【答案】e^{-1}

【考情点拨】本题考查了$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$的应用的知识点.

【应试指导】$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}\cdot(-1)-\frac{1}{2}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{-1}\cdot(-1)}\left(1+\frac{-1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}.\end{aligned}$$

注：此题也可考虑取对数后，利用洛必达法则，但这样较复杂.

18、$y=x^2e^{\frac{1}{x}}-a^x(a>0,a\neq1)$，则 $y'=$ ________.

【答案】$e^{\frac{1}{x}}(2x-1)-a^x\ln a$

【考情点拨】本考题考查了一元函数的一阶倒数的知识点

【应试指导】$y'=2xe^{\frac{1}{x}}+x^2e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$-axlna

$=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)-a^x\ln a$.

19、若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，又 $\lim_{x\to x_0}f(x)=1$，则 $f(x_0)=$ ________.

【答案】1

【考情点拨】本题考查了函数可导的定义的知识点.

福建专升本网 ★ WWW.FJZSB.CN ★

【应试指导】 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，因此 $f(x)$ 在 x_0 处左连续，于是，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，而 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = 1$，故 $f(x_0) = 1$.

20、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} =$ ________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2}$.

注：$x\to 0$ 时，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，用等价无穷小代换更易求出结果.

三、解答题(21～28题，共70分．解答应写出推理、演算步骤)

21、(本题满分8分)

电路由两个并联电池A与B，再与电池C串联而成，设电池A、B、C损坏的概率分别是0.2，0.2，0.3，求电路发生间断的概率.

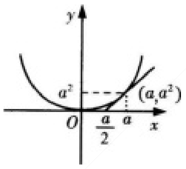
用 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 分别表示A、B、C电池损坏，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{C}) &= P(\overline{A}\,\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\\ &= P(\overline{A})P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\ &= 0.2\times 0.2 + 0.3 - 0.2\times 0.2\times 0.3\\ &= 0.328.\end{aligned}$$

22、(本题满分10分)

求曲线y=x^2，与该曲线在x=a(a>o)处的切线与x轴所围的平面图形的面积.

如图所示，在 $x = a$ 处切线的斜率为 $y'\big|_{x=a} = 2a$，切线方程为 $y - a^2 = 2a(x-a)$，



即 $y = 2ax - a^2$，

$$S = \int_0^{a^2}\left(\frac{y+a^2}{2a} - \sqrt{y}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{y^2}{2} + a^2 y\right)\Big|_0^{a^2} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a^2} = \frac{1}{12}a^3.$$

23、(本题满分8分)

求 $\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}&\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x\\ &= x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \int x\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\cdot\frac{1}{2x}\mathrm{d}x\\ &= x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x\\ &= x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{2}x\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right) + \frac{1}{2}\cdot\\ &\quad\int x\left[-\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right]\frac{1}{2x}\mathrm{d}x\\ &= x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{4}\cdot\\ &\quad\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{5}{4}\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$

$= x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)$，

故 $\int\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}\left[x\sin\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\right]$.

24、(本题满分8分)

设 $f(x) = \int_{x+1}^{x^2} e^{2t}\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$.

$\because f(x) = \int_{x+1}^{x^2} e^{2t}\mathrm{d}t = -\int_0^{x+1} e^{2t}\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} e^{2t}\mathrm{d}t$，

$\therefore f'(x) = 2x\cdot e^{2x^2} - e^{2(x+1)}$.

25、(本题满分10分)

设 $\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，求 $\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

福建专升本网 ★ WWW.FJZSB.CN ★

由$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,两边对$x$求导有

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

所以 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{x}$, 故 $\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$.

两边积分得$\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

26、(本题满分8分)

求$\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x=-\lim_{a\to+\infty}\int_0^a x\mathrm{d}e^{-x}$$

$$=\lim_{a\to+\infty}(-ae^{-x})\Big|_0^a+\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{a\to+\infty}(-ae^{-a})+\lim_{a\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^a$$

$$=\lim_{a\to+\infty}(1-e^{-a})=1.$$

27、(本题满分8分)

设$y=\sin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,求$y'$.

$$y'=\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$=\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

28、(本题满分10分)

确定函数$y=2x^4-12x^2$的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

$y'=8x^3-24x$,$y''=24x^2-24$,令$y'=0$,得$x=\pm\sqrt{3}$或$x=0$.

令$y''=0$,得$x=\pm1$;$x<-\sqrt{3}$时,$y'<0$;$-\sqrt{3}<x<0$时,$y'>0$;

$0<x<\sqrt{3}$时,$y'<0$;$x>\sqrt{3}$时,$y'>0$.

于是,函数的递增区间为$(-\sqrt{3},0)$和$(\sqrt{3},+\infty)$;递减区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(0,\sqrt{3})$;有极小值$f(\pm\sqrt{3})=-18$,有极大值$f(0)=0$.

又因当$-\infty<x<-1$时,$y''>0$,则y为凹函数;

当$-1<x<1$时,$y''<0$,则y为凸函数;

当$1<x<+\infty$时,$y''>0$,则y为凹函数.

综上得函数y的凹区间为$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$,凸区间为$(-1,1)$,且拐点为$(-1,-10)$和$(1,-10)$.

福建专升本网 ★ WWW.FJZSB.CN ★