成人高考专升本高等数学考试模拟题一

一、选择题(1～10小题，每小题4分。共40分．在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1、$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$，则 $f'(1)=$ （ ）

A、 $-\frac{1}{6}$

B、 $\frac{5}{6}$

C、 $-\frac{5}{6}$

D、 $\frac{1}{6}$

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点．

【应试指导】 因 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{3}{2}}$，

所以 $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$，

故 $f'(1)=-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$．

2、若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 （）

A、 奇函数

B、 偶函数

C、 非奇非偶函数

D、 周期函数

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点．

【应试指导】 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)$（因 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(x)=f(-x)$）

$=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$，

所以 $F(x)$ 是奇函数．

3、$\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x=$ （ ）

A、 0

B、 $\frac{1}{4}(e^2+1)$

C、 $\frac{1}{4}(e^2-1)$

D、 e^2-1

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了分部积分法的知识点．

【应试指导】 $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_1^e \ln x\mathrm{d}x^2$

$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$

$=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right)=\frac{1}{4}(e^2+1)$．

4、函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & 0\leqslant x<1,\\ 2x, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 的连续区间是（）

A 、 [0，1)$\cup$(1，3]

B 、 [1，3]

C 、 [0，1)

D 、 [0，3]

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】因 $x=1$ 处 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$，

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2x=2$，

所以f（x）在x=1处不连续，因此f（x）的连续区间为[0，1)∪（1,3]

5、设z=xy，则dz=（ ）

A 、 $yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$

B 、 $x^{y-1}\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$

C 、 $x^y(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

D 、 $x^y(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】由 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot\ln x$，所以

$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$，故选 A.

6、函数 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 在区间 $(-1,1)$ 内 （）

A 、 单调减少

B 、 单调增加

C 、 不增不减

D 、 有增有减

答案： D

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 因为 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，所以 $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，令 $y'=0$，得 $x=0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$；当 $x<0$ 时，$y'<0$，故在 $(-1,1)$ 内，函数有增有减.

7、把两封信随机地投入标号为1，2，3，4的4个邮筒中，则l，2号邮筒各有一封信的概率等于

A 、 $\frac{1}{16}$

B 、 $\frac{1}{12}$

C 、 $\frac{1}{8}$

D 、 $\frac{1}{4}$

答案： C

解析：

8、函数y=a^2+c在(0，+∞)上单调增加，则a，c应满足（）

A 、 a<0且c=0

B 、 a>0且c是任意常数

C 、 a<0且c≠0

D 、 a<0且c是任意常数

数

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了函数的单调增加性的知心点

【应试指导】 由 $y'=2ax$，若 y 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，则应有 $y'>0$，即 $a>0$，且对 c 没有其他要求，故选 B.

9、曲线 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为（ ）

A 、 (4，2)

B 、 x=4

C 、 y=2

D 、 (2，4)

答案： A

解析： 【考情点拨】本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】

$y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$，$y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}$，$y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$，函数在 $x=4$ 处连续，当 $x<4$ 时，$y''>0$；当 $x>4$ 时，$y''<0$，所以点(4，2)为曲线的拐点.

10、已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\frac{1}{4}$，则 $f'(x_0)$ 等于( )

A 、 -4

B 、 -2

C 、 2

D 、 4

答案： B

解析： 【考情点拨】本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}}=\frac{1}{-2f'(x_0)}=\frac{1}{4}$，

于是 $f'(x_0)=-2$.

二、填空题(11～20小题，每小题4分，共40分)

11、$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2+x+2}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{3x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$

$=\frac{1}{3}$.

12、$\int e^x(1+e^x)dx=$ ________.

【答案】 $e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

13、$\int e^{2x^2+\ln x}dx=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int e^{2x^2+\ln x}dx=\int e^{2x^2}e^{\ln x}dx$

$=\int e^{2x^2}x\,dx$

$=\frac{1}{4}\int e^{2x^2}d2x^2$

$=\frac{1}{4}e^{2x^2}+C.$

14、设 $z=\arctan\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

【答案】$-\dfrac{1}{2(x+y)}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{y}{x}}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{2(x+y)}\sqrt{\dfrac{y}{x}}.$

15、设 $y=x^2\cos x+2^x+e$，则 $y'=$ ________.

【答案】$2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln2$

【考情点拨】本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】$(x^2\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$，

$(2^x)'=2^x\cdot\ln2$，$e'=0$，

所以 $y'=2x\cos x-x^2\sin x+2^x\ln2$.

16、设 $z=\sqrt{x(x+y^2)}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【答案】$\dfrac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x(x+y^2)}}\cdot x\cdot 2y=\dfrac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}.$

17、设f(x)是[-2，2]上的偶函数，且f'(-1)=3，则f'(1)=_.

【答案】-3

【考情点拨】本题考查了函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】因 $f(x)$ 是偶函数，故 $f'(x)$ 是奇函数，所以 $f'(-1)=-f'(1)$，

即 $f'(1)=-f'(-1)=-3$.

18、$\displaystyle\int(\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=$ ________.

【答案】$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C$

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】$\displaystyle\int(\sqrt{x}-1)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=\int(x^{\frac{1}{2}}-1+x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1})dx$

$=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+2x^{\frac{1}{2}}-\ln|x|+C.$

19、曲线Y=x^3-3x^2+2x+1的拐点是_.

（1，1）

【应试指导】$y'=3x^2-6x+2$，$y''=6x-6$，令 $y''=0$，得 $x=1$. 则当 $x>1$ 时，$y''>0$；当 $x<1$ 时，$y''<0$. 又因 $x=1$ 时 $y=1$，故点(1,1)是拐点(因 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有二阶导数，故没有其他形式的拐点).

20、设 $z=\ln(x^2+y^2)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【答案】2

【考情点拨】本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$，

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}=2.$

三、解答题(21～28题，共70分．解答应写出推理、演算步骤)

21、(本题满分8分)

计算 $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx.$

$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{e^x}{1+e^x}de^x=\int\frac{e^x+1-1}{1+e^x}de^x$

$\displaystyle=\int\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)de^x$

$=e^x-\ln(1+e^x)+C.$

另解，令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$dx=\dfrac{1}{t}dt$，

$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{1+e^x}dx=\int\frac{t^2}{(1+t)t}dt=\int\frac{t}{1+t}dt$

$\displaystyle=\int\frac{t+1-1}{1+t}dt$

$\displaystyle=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$

$=t-\ln(1+t)+C$

$=e^x-\ln(1+e^x)+C.$

22、(本题满分8分)

求$\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{2+3\tan x}}dx$.

因$\frac{1}{\cos^2 x}dx = \sec^2 x dx = d\tan x$，

所以$\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{2+3\tan x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}}d\tan x$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{2+3\tan x}}d(2+3\tan x)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2+3\tan x}+C$.

23、(本题满分8分)

设$z=f(u)$，$u=xy+\frac{y}{x}$，f是可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\cdot\left(y-\frac{y}{x^2}\right)$，

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

24、(本题满分8分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

原式$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2}$

$= 2$.

注：本题也可用洛必达法则求解.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0}2\sqrt{1-x^2} = 2$.

本题还可用变量代换求解如下：令$\sqrt{1-x^2}=t$.

原式 $= \lim\limits_{t\to 1}\frac{1-t^2}{1-t} = \lim\limits_{t\to 1}(1+t) = 2$.

25、(本题满分10分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} te^t\sin t dt}{x^6}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} te^t\sin t dt}{x^6} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2e^{x^2}\sin x^2\cdot 2x}{6x^5}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\sin x^2}{6x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

26、(本题满分8分)

计算$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ （被积函数为偶函数）

$=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x d\sqrt{1-x^2}$

$=-2(\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,d\arcsin x$

$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+1=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

27、(本题满分10分)

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_x^b\frac{1}{f(t)}dt$.

证明：

(1)F'(x)>0;

(2)F'(x)=0在[a，b]内有唯一实根.

(1) 由题知 $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$，

因$f(x)>0$，所以$f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$，

故$F'(x)>0$.

(2) 由$F'(x)>0$，知$F(x)$在$[a,b]$上单调增加，故$F(x)$在$[a,b]$中最多有一个零点，即方程$F(x)=0$最多有一个实根.

又因$F(a)=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

故由零点定理知F(x)在[a，b]内至少有一个零点，即至少有一个$\xi\in$[a，b]使得F()=0，这也说明方程F(ξ)=0在[a，b]内至少有一个实根．综上所述，F(x)=0在[a，b]内有唯一实根.

28、(本题满分8分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$