

2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）

第 I 卷（选择题，40 分）

一、选择题(1~10 小题。每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = (\quad)$

A. $-e^2$ B. $-e$ C. e D. e^2

2. 设函数 $y = \arcsin x$ ，则 $y' = (\quad)$

A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $-\frac{1}{1+x^2}$ D. $\frac{1}{1+x^2}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 可导， $f'(x) > 0$ ， $f(a)f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a, b) 零点的个数为 (\quad)

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

4. 设函数 $y = x^3 + e^x$ ，则 $y^{(4)} = (\quad)$

A. 0 B. e^x C. $2 + e^x$ D. $6 + e^x$

5. $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = (\quad)$

A. $\arctan x$ B. $\operatorname{arccot} x$ C. $\frac{1}{1+x^2}$ D. 0

6. $\int \cos 2x dx =$

A. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ B. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$ C. $\frac{1}{2} \cos 2x + C$ D. $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$

7. 下列不定积分计算正确的是 (\quad)

A. $\int x^2 dx = x^3 + C$ B. $\int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{x} + C$

C. $\int \sin x dx = \cos x + C$ D. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. 设函数 $z = (x - y)^{10}$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ()

- A. $(x - y)^{10}$ B. $-(x - y)^{10}$ C. $10(x - y)^9$ D. $-10(x - y)^9$

9. 设函数 $z = 2(x - y) - x^2 - y^2$ ，则其极值点为 ()

- A. $(0, 0)$ B. $(-1, 1)$ C. $(1, 1)$ D. $(1, -1)$

10. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
P	2a	a	3a	4a

则 $a =$ ()

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

第Ⅱ卷（非选择题，110分）

二、填空题：11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分。将答案填写在答题卡相应题号后。

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 与 $3x$ 是等价无穷小，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$ _____

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} =$ _____

13. 设函数 $f(x) = \sqrt{x + x^2}$ ，则 $f'(1) =$ _____

14. 设 x^2 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x) =$ _____

15. 设函数 $y = \ln \sin x$ ，则 $dy =$ _____

16. $\int \frac{1}{x^2} dx =$ _____

17. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ _____

18. $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx =$ _____

19. 设函数 $z = \frac{e^y}{x}$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

20. 设函数 $z = \sin x \cdot \ln y$, $dz =$ _____

三、解答题：21~28 题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤，并将其写在答题卡相应题号后

21. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$

22. 设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 求 $f'(x)$

23. 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

24. 计算 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

25. 一个袋中有 10 个乒乓球，其中 7 个橙色，3 个白色，从中任取 2 个，设事件 A 为“所取的 2 个乒乓球颜色不同”，求事件 A 发生的概率 $P(A)$.

26. 设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 2$ 处取得极值，点 $(1, -1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点，求 a, b, c

27. 已知函数 $f(x)$ 的导函数连续, 且 $f(1)=0$, $\int_0^1 xf(x)dx=4$, 求 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

28. 设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 证明 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

2019 年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）试题答案解析

1. 【答案】D

【解析】两个重要的极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \times 2} = e^2$

2. 【答案】B

【解析】 $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. 【答案】C

【解析】由零点存在定理可知, $f(x)$ 在 (a, b) 上必有零点. 且函数是单调函数, 故其在 (a, b) 上只有一个零点.

4. 【答案】B

【解析】 $y' = 3x^2 + e^x, y'' = 6x + e^x, y''' = 6 + e^x, y^{(4)} = e^x$

5. 【答案】C

【解析】 $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+x^2}$.

6. 【答案】A

【解析】 $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

7. 【答案】D

【解析】 $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)^3 d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x+1)^4 \Big|_0^1 = 10$.

8. 【答案】C

【解析】由偏导数公式可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 10(x-y)^9$.

9. 【答案】D

【解析】易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2-2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2-2y$, 令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得驻点 $(1, -1)$,

而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, 故 $\Delta = 0 - (-2) \cdot (-2) = -4 < 0$, 因此 $(1, -1)$

是函数的极值点。

10. 【答案】 A

【解析】 $2a + a + 3a + 4a = 10a = 1 \Rightarrow a = 0.1$

11. 【答案】 3

【解析】 由题可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 3$

12. 【答案】 2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$.

13. 【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【解析】 $f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$, 因此 $f'(1) = \frac{1+2 \times 1}{2\sqrt{1+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

14. 【答案】 $2x$

【解析】 由题意可知 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 故 $f(x) = (\int f(x) dx)' = (x^2 + C)' = 2x$

15. 【答案】 $\cot x dx$

【解析】 $dy = d(\ln \sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \cot x dx$

16. 【答案】 $-\frac{1}{x} + C$

【解析】 $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$

17. 【答案】 $2 \sin \sqrt{x} + C$

【解析】 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos \sqrt{x} d\sqrt{x} = 2 \sin \sqrt{x} + C$.

18. 【答案】 4

【解析】 $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx = \int_{-1}^1 x \cos^2 x dx + 2x \Big|_{-1}^1 = 0 + 4 = 4.$

19. 【答案】 $-\frac{e^y}{x^2}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^y}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^y}{x^2}.$

20. 【答案】 $\cos x \ln y dx = \sin x \frac{1}{y} dy$

【解析】 $dz = d(\sin x \cdot \ln y) = \ln y d(\sin x) + \sin x d(\ln y) = \cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy.$

21. 【答案】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

22. 【答案】

$$f'(x) \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

23. 【答案】

令 $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \cos t dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cdot \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + C$$

而 $t = \arcsin x$, 故有 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \tan t + C = \tan(\arcsin x) + C$

24. 【答案】

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^3 x} d(\ln x) = -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

25. 【答案】

A 为所取的 2 个乒乓球颜色不同, 即 A 表示所取的 2 个球中 1 个球是

橙色，一个球是白色，故 $P(A) = \frac{C_7^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$.

26. 【答案】

易知 $f'(x) = 3a^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$, 由于 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值. 则

$f'(2) = 12a + 4b + c = 0$, 点 $(1, -1)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. 故有 $f(1) = -1, f''(1) = 0$.

即 $\begin{cases} a + b + c = -1, \\ 6a + 2b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 0$.

27. 【答案】

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) dx &= \int_0^1 x^2 df(x) = x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \\ &= f(1) - 2 \int_0^1 xf(x) dx = 0 - 2 \times 4 = -8 \end{aligned}$$

28. 【答案】 因为 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$

故 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + y^2 \cdot \frac{1}{y^2} = -1 + 1 = 0$